

寄 稿



理学療法士のための力学 —応用編—*

鈴木康雄

1. はじめに

前回の基礎編では、2次元平面内の運動を考えました。今回はその応用として、3次元平面内の運動を考えてみます。そして、力学的な応用問題として前回よりも少し複雑な事例を取り上げます。3次元の問題となると、概念を把握しにくくなってしまうが、試みとして線型代数学の助けを借りて説明してみます。また、本稿で説明する力学概念をもとに、複雑な応用問題を解くためのコンピュータモデルを使った解析についても概説します。

2. 空間とベクトル

2次元平面内では、並進(x 方向と y 方向)の2つの自由度と回転(z 軸まわり)の1つの自由度、合わせて3自由度があることを基礎編で述べました。3次元では並進(z 方向)の1つの自由度と回転(x 軸まわりと y 軸まわり)の2つの自由度が加わり、並進3自由度と回転3自由度の合計6自由度になります。これをFig. 1に示します。

軸の順番(x , y , z 軸の方向)は「右ねじが向く方向」、あるいは右手系で考えると便利といいうことを前回述べました。これも3次元系で改めて示すと、Fig. 2のようになります。軸の回転は回転する向きに注意が必要です。 z 軸の回転とは x 軸から y 軸の方向に回転するときに進む方向が z です。同様にして y 軸から z 軸に回転するときに進む方向が x で、 z 軸から x 軸に回転する方向が y

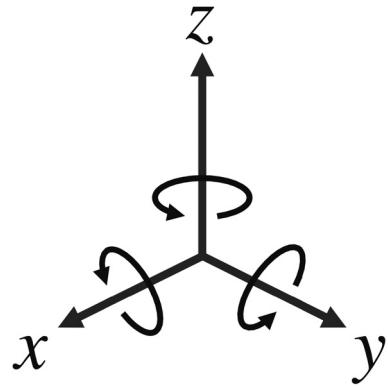


Fig. 1 3次元の軸と回転の自由度

です。 $x \rightarrow y \rightarrow z$ の順番に回転を考えるということが、複雑な3次元の計算を楽にすることにつながります。

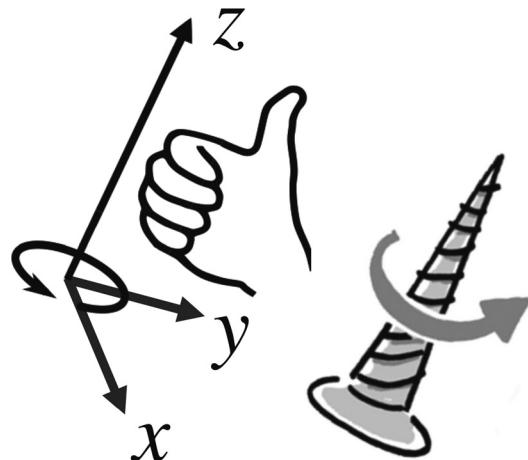


Fig. 2 3次元座標軸と右ねじの方向

ここで、ベクトルという概念について考えてみます。ご存知のように、力はベクトルという概念で表示されることが多い、ベクトルは大きさと方

* Mechanics for Physical Therapists: Advanced Practicum

日本福祉大学 健康科学部 福祉工学科
(〒475-0012 愛知県半田市東生見町26-2)

Yasuo Suzuki, Dr. of Engineering: Faculty of Health Sciences, Department of Human Care Engineering, Nihon Fukushi University

E-mail: yasuo-s@n-fukushi.ac.jp

向で定義されます。3次元空間内では座標系を使って、 $[x, y, z]$ と表記されます。この表現は座標位置を示す (x, y, z) と似ており、使い分けることがあります。ベクトルは $x : y : z$ の比で方向が分かり、 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ でその大きさが分かります。絵で描くと一本の矢印になります。ただし、その矢印の起点はこのベクトル表記だけでは定まっていません。力を定めれば、それが示す矢印は空間内を並進移動できます。物体に力が作用すると、作用した力はそのまま真っすぐ物体の中を伝達することと同じ考えです。このカギ括弧で囲んだベクトル表記 $[x, y, z]$ は、線形代数という数学を使うと非常に便利になるので、後でそれを使いながら考えていきます。

3. 関節の運動

身体運動を考えるときに座標系を使う場合、絶対座標系と体節の座標系の2つを考えます。絶対座標系は計測座標系とも言われ、地球（床面）を固定した場合の座標系 $[x, y, z]$ で、その座標系の中で加速度や重力を考えるのに慣性座標系とも呼ばれます。一方、体節の座標系は身体の体節上に固定した座標系であり、運動と共に絶対座標系の中でその座標系が動きます。つまり体節の運動と共に座標軸が動きます。Fig. 3では、下腿の軸 $[x_1, y_1, z_1]$ と大腿の軸 $[x_2, y_2, z_2]$ が動きます。一方、体節間の動きは関節の動きとしてFig. 4のように関節軸を使って表すことが一般的です。この場合、3つの軸が単独で動く場合は理解しやすいのですが、複数の軸が同時に動く場合に混乱を生じることがあります。例えば、屈曲してから外反する場合と、外反してから屈曲する場合とでは、動いた後の関節の位置が異なるというものです。実際の運動は屈曲と外反を同時にしていますが、屈曲何度、外反何度という値を求める場合には、逆に、この3つの軸の動かす順番を決めないと角度の値が求められないということになります。この理由は、1つの軸が回転すると他の軸が動いてしまうということにあります。軸が動かない場合、軸どうしが直交（お互いに90度で交わる）しなくなり、角度の定義があいまいになります。

それでは、関節の角度を体節の座標系を使って表すはどうなるでしょうか。これは、ある座標系からある座標系への変換という方法を使って表すことができます。Fig. 3の例では、大腿の座標系から下腿の座標系への変換です。それを行列式というもので表現してみましょう。Fig. 3の大股と

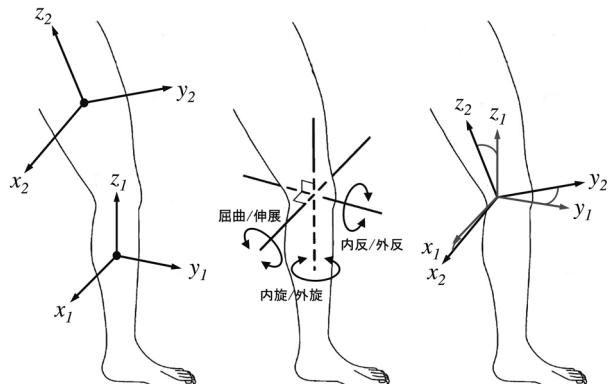


Fig. 3

体節の座標軸

Fig. 4

膝関節軸

Fig. 5

膝関節位置を原点とした各体節の座標軸

下腿の座標軸をそれぞれ並進移動させ膝関節で原点を一致するようにしたのがFig. 5です。これを大腿の軸を下腿の軸に一致するように、軸を回転させると、回転行列 $[R]$ を用いて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

と表します。この式は大腿座標系の値から下腿座標系の値に変換することを意味しています。そのため $[R]$ は変換行列とも呼ばれます。行列はマトリックスとも呼ばれるので、行列式を多用する線型代数では変換マトリックスとも呼ばれます。 $[R]$ の中身は3行3列の計9つの要素からなる行列になっています。Fig. 5では各軸が同時に回転しているように見えますが、ある軸が回転すると他の軸が移動するので、計算上は一つの軸で回転させた後に他の軸で回転させ、さらに残りの軸で回転させます。したがって、各軸を順に回転させると、 x 軸の回転行列を $[R_x]$ 、 y 軸の回転行列を $[R_y]$ 、 z 軸の回転行列を $[R_z]$ とすると、

$$x\text{軸で回転} : [R_x] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{次に } y\text{ 軸で回転} : [R_y] [R_x] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{さらに } z\text{ 軸で回転} : [R_z] [R_y] [R_x] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

となるので (1) 式は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [R_z][R_y][R_x] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

となります。膝関節の場合、これは順に、屈曲 / 伸展の軸 (x 軸) で回転させ、内反 / 外反の軸 (y 軸) で回転させ、内旋 / 外旋の軸 (z 軸) で回転させることに相当します。よく使われる Grood¹⁾ らの膝関節の角度定義ではこの順番に回転しています。

行列式の簡単な計算例と回転行列の中身については付録に示したので参考にして下さい。また、行列式をもう少し勉強したい方は線形代数学を学ぶことになると思いますが、身体運動の解析に必要な部分は三角関数が出てくるあたりを中心に学習するとよいと思います。

回転行列は回転する角度の \sin , \cos 関数で表されるので、各軸の回転角度が分かっていれば、(1) 式をそのまま使って $[x_2, y_2, z_2]$ の位置にあった点が回転移動した位置 $[x_1, y_1, z_1]$ を求めることはできます。これは、ロボットのアームを動かすときなど、3 軸のモーターそれぞれに回転角度を指定すると手先がどの位置に移動するかを知ることに使われます。これを順動力学と呼びます。一方、身体運動の解析では体節が動いた結果、何度回転したかを求める場合が多いと思います。これを逆動力学と呼びます。そのような場合、(1) 式は 3 つの回転角度を未知数とした連立方程式になります。非線形と呼ばれる方程式なので解きにくそうに見えますが、解き方の概略を付録に示しました。

4. 回転とモーメント

回転を考えるとき働く力はモーメントですが、モーメント M は力 F とその力の方向に垂直な軸までの長さ（モーメントアーム） l の積です。

$$M = l F \quad (3)$$

3 次元空間においても同じ扱いですが、回転する軸から作用する点までのベクトルを r 、作用する力ベクトルを F とすると、モーメントは

$$M = r \times F \quad (4)$$

と表します。ここで \times は外積であることを示しています。記号が太文字なのはベクトルであるこ

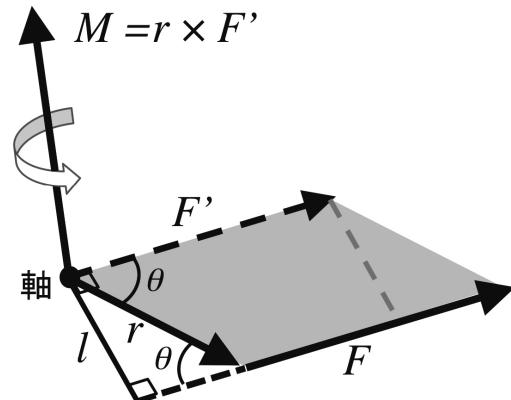


Fig. 6 3次元空間におけるモーメント

とを明示するためです。この式によって作られるモーメント M は r と F によって作られる平行四辺形の面積と同じ大きさで、平行四辺形の面に垂直な方向になります。Fig. 6 に模式図を示します。

Fig. 6 では、モーメント M は力 F を並行移動して回転軸を起点とした力 F' と r との外積で表しました。軸から力 F に垂直に下ろしたモーメントアーム l を考えると、 l の長さは

$$|l| = |r| \sin \theta \quad (5)$$

であるため、 r と F から作られる並行四辺形の面積からモーメント M の大きさ

$$|M| = |r||F| \sin \theta \quad (6)$$

となります。Fig. 6 で回転の向きも示しましたが、回転に作用するモーメント M は軸からの矢印で表しました。矢印表記は回転というイメージと異なるかもしれませんのが方向と大きさを持っているためこのような表記をします。ここでも方向には注意して下さい。モーメントのベクトルの方向は回転中心から作用点へ向かうベクトル r と作用点からの力ベクトル F により回転する「右ねじ」が進む方向です。

それでは、(4) 式で示した外積の計算に行列式を使って解いてみましょう。軸を原点とし、作用点（ベクトル r ）の座標を (r_x, r_y, r_z) 、力（ベクトル F ）の成分を (F_x, F_y, F_z) とすると (4) 式は

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表します。一見分かりにくそうですが、この式の特徴はモーメントの各成分が他の軸成分の \mathbf{r} と \mathbf{F} から成っていることです。つまり他の2軸から構成される平面に垂直なもう1つの軸の方向にモーメントは向かっている (\mathbf{r} と \mathbf{F} から構成される面に垂直) という解釈ができると理解しやすいと思います。また(7)式の3行目だけを取り出すと、2次元 $x-y$ 平面上の見慣れたモーメントの計算式になるので、最初はこの式だけに着目すると理解しやすいかもしれません。

Fig. 6 を使って、実際の運動計測の場合を考えましょう。足関節の位置を軸中心とし、作用点を床反力の COP (center of pressure: 圧力中心) とし、 \mathbf{F} を床反力ベクトルとすると、(7)式の右辺を構成する変数の値は全て計測結果から得られるので、足関節モーメント3成分の値は直ちに計算できます。(6)式のように角度を求めてから三角関数を使うよりもはるかに容易に計算できると思いませんか。さらに、必要に応じて(1)式を使って、足部の座標系や下腿の座標系に変換すれば、それぞれの体節における軸まわりのモーメントが計算できます。これもモーメントをベクトルとして扱って計算すると便利な点です。

5. 関節の運動力学

それでは、もう少し詳細に関節を考えてるために例として膝関節を取り上げます。従来から関節に働く力学量として関節モーメントが着目され、運動計測データから剛体リンクモデル²⁾を使って計算されてきました。関節モーメントを求める目的は関節に働く筋力を推測することが主な目的だと思いますが、筋は機械的なモーターと異なり関節モーメントだけでその力を推定することには限界があります。その理由として、拮抗する筋との共同収縮がある場合を想定できない、筋群としての推定であり例えば単関節筋と二関節筋の分離ができない、関節角度の変化について変化する筋のモーメントアーム変化に対応できない、筋の収縮方向が軸の回転の向きと異なる場合に値がずれる、回転軸が固定されているなど、種々の問題を持っています。これらの問題のうち、関節の構造を考えることで解決する場合があります。膝の伸展筋である大腿四頭筋は膝蓋骨を介して筋張力を脛骨に伝えていますが、その模式図を Fig. 7 (a) に、機構学的にモデル化した図を Fig. 7 (b) に、それぞれ文献³⁾から引用して示します。

これらの図から、膝関節モーメントを構成するつりあいの軸はどこにあると考えられるでしょう

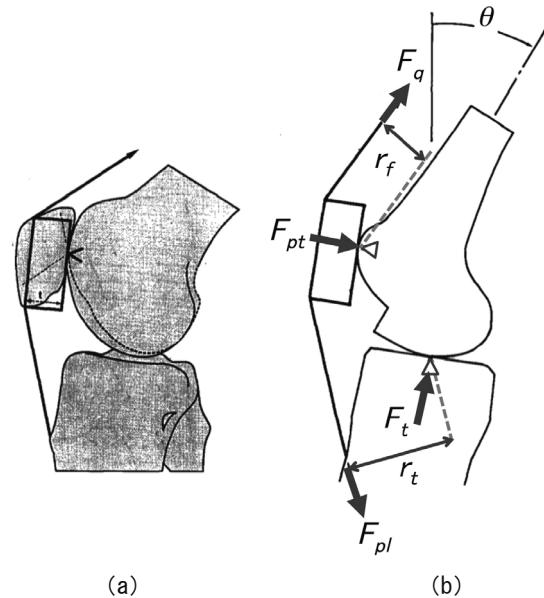


Fig. 7 膝の模式図 (a) と膝をモデル化した図 (b). Yamaguchi (1989)³⁾を改変。四頭筋力 F_q が働けば、膝蓋骨から大腿骨へ F_{pt} の力と、膝蓋靭帯により脛骨へ F_{pl} の力と、脛骨から大腿骨への F_t 力が働き、それらがつり合っていると考えられる。

か。膝関節の軸は大腿骨内外側頸の中心近辺を膝屈曲角度に依存して動くとされますが、これは回転中心と呼ばれるもので動きの軸に相当します。しかし、力学的なモーメントを構成する軸（支点）は、大腿四頭筋の場合は膝蓋骨が大腿骨骨頭と接する点であり、膝蓋靭帯の場合は大腿骨と脛骨が接する点と考えられないでしょうか。Fig. 7 (b) のような図から骨の形態や運動につれて変化する骨間の相対位置を、数値あるいは関数で表した数学モデルを作ることができます。その数学モデルをコンピュータ上でプログラミングすれば、コンピュータモデルとなり、任意の運動におけるモデルの動きと力関係が計算できます。Fig. 7 (b) のモデルから膝の屈曲角度変化に応じた大腿四頭筋と膝蓋靭帯のモーメントアーム (r_f と r_t) を計算すれば、外力（床反力等）によって生じた膝モーメントから膝蓋靭帶張力と大腿四頭筋力がそれぞれで計算できます。

他にも力学的なモデルを使うことで有利な点があります。その例としてスクワット運動を取り上げます。ご存じのように、この運動は CKC (Closed Kinetic Chain: 閉運動連鎖) と呼ばれ、膝の伸展筋だけでなく拮抗するハムストリングスも働くと言われています。このことを Fig. 8 に示したモデルを使って考えてみます。

スクワット運動中は重心が足部の中ほどに落ち

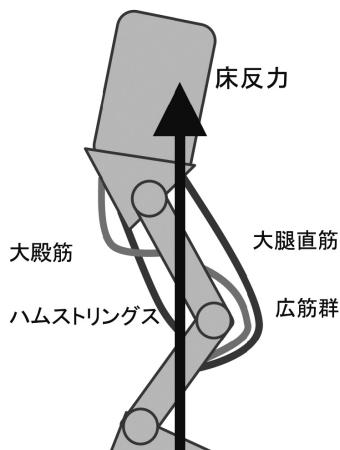


Fig. 8 スクワット運動中に働く外力と筋

ます。そのため、床反力は下肢の体節の間を通過することになります。通常、股関節より前方、膝関節より後方を床反力ベクトルが通ります。この場合、股関節には屈曲モーメントが外部から作用し、膝関節にも屈曲モーメントが作用します。その結果、それぞれの関節には伸展筋が働き、運動のつりあいを保つことになります。膝の伸展筋は大腿四頭筋ですが、大腿直筋は股関節に屈曲筋として働くので大腿四頭筋の中でもこの筋は働く可能性があります。一方ハムストリングスは、膝関節には屈曲筋として働きますが股関節には伸展筋として働くので、スクワット運動中に働く可能性があります。二関節筋が働くか働かないかの区別はどのようにして決まるのでしょうか。その解決の1つに効率の問題があります。ハムストリングスの働きといえば、スクワット運動において膝関節の屈曲より股関節の伸展の働きが効率的にまさっていれば、この筋は働くと考えられます。これも下肢の筋の付着位置をモデル化し、効率のよい筋力のバランスを求めることで、各筋の筋力を推定できます。二関節筋の問題はこれだけで解決できないかもしれません、スクワット運動を計測して計算してみたところ⁴⁾ ハムストリングスの筋力が発生していました。さらに、Fig. 8 の図から推定できることですが、体荷重の位置を前に移動することによって、よりハムストリングスの筋力が大きくなることも分かりました。スクワット運動は、機構学的にみて体節の他端（頭部）が開いているのでCKCの運動と呼ぶことに未だ違和感を感じていますが、今回のモデルについて物理的に言えば、閉運動連鎖ということに直接関係なく、外力が関節をまたぐ体節間を通して、拮抗する二関節筋が働くことを示しています。

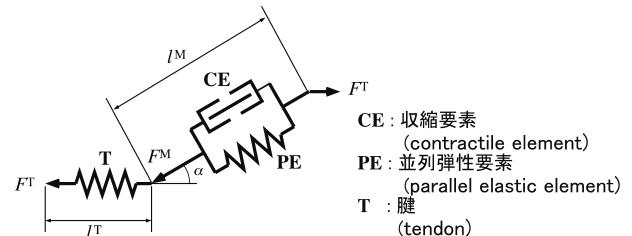


Fig. 9 筋モデル

さらに、モデルを詳細に構築した例として筋骨格モデルがあります。これは関節や筋の付着位置だけでなく、筋の構造もモデル化したものです。筋モデル⁵⁾の概念図を Fig. 9 に示します。

ここでは、収縮要素 CE とそれに並列な筋の弾性要素 PE が腱の伸び方向に対して羽状角 α を持っているとしています。収縮要素 CE は、筋線維長と筋線維の収縮速度に依存して筋張力が変化する関数として数値化し、最大筋力は生理的筋断面積に比例し、筋刺激の大きさによって筋力を変化させます。並列弾性要素 PE と腱 T はそれぞれ非線形なバネで数式化します。

3次元的な筋の位置と上記筋モデルの筋ごとのパラメータを文献等で求め、下肢の筋骨格コンピュータモデルを製作しました。それをスクワット運動に応用した例を示します⁶⁾。運動は3次元座計測装置と床反力計を使って計測し、被検者の体節の質量、重心位置、慣性モーメントを入力し、筋力によるストレスが最小になる条件を入れて計算しました。結果を3次元グラフィックスで Fig. 10 に示します。

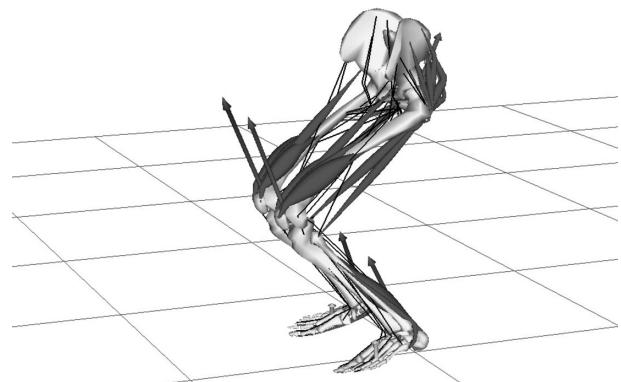


Fig. 10 筋骨格モデルを用いてスクワット運動を解析した例

筋力を筋の太さで示しているので、スクワット運動中にハムストリングスの筋力が発生しているのが分かります。このような解析では、関節内の力のつりあい式を解くため、本稿の2章で述べた

ように筋力による関節モーメントが求まるだけでなく、関節内の3軸方向の並進力が求まります。その力ベクトルをFig. 10では関節からの矢印で表しました。この力は骨の接触応力や靭帯による張力などによって発生するので、筋骨格モデルによる解析は関節内の疾患部位の力学的な解析も可能にする発展性を持っています。

この解析例は、運動した状態が計測などで分かっており、身体の力学量を求めるものでした。一方、力学量を与えた時にどのような運動になるかを求める要求もあります。3章でも触れましたが、前者を逆動力学、後者を順動力学と呼び、運動の問題を解くための目的と方法が異なる2つのアプローチがあります。後者の例では、投球動作でボールを投げる角度や力を与えるとどこまで飛んで行くかを求める場合や、大規模なものでは天気予報などです。シミュレーションとは本来、順動力学を指すものだという意見もあります。順動力学を使って身体運動を使うことの優位点は予測動作が可能ということです。例えば、手術における特定の手技を使った結果、対象患者はどのような歩行が可能になるかを術前に表示させたり、関節の負荷がどの程度になるかを前もって知ることができます。身体運動に応用した順動力学の実用的な解析は、逆動力学を使った例に比べはるかに少ないのが現状です。その理由の1つは計算がより複雑になり安定した解を得るまでに多くの時間を必要とするからです。順動力学の身体運動への応用例として、筋骨格モデルを義足歩行に応用し^{7) 8)}、運動の生成とともに最適なパラメータを求める試みがあります。しかしこれでも十分な成果をあげているとは言えません。むしろ、今後大きく期待される分野であると考えられています。

付録

式(1)において、3次元空間の回転を表す回転行列

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (A1)$$

で、座標 $[x, y, z]$ を回転させると、

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z \\ r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z \\ r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z \end{bmatrix} \quad (A2)$$

になります、この計算は、左側の回転行列の行の部分が右側のベクトルの列の部分に対応させ、各項の積を足し合わせています。

まず、2次元の $x-y$ 平面上で考えてみましょう。点 $[x, y]$ を角度 θ で回転させると

$$x' = \cos \theta x - \sin \theta y \quad (A3)$$

$$y' = \sin \theta x + \cos \theta y \quad (A4)$$

という式ができますが、これに $z' = z$ という式を加え、(A2) 式のような3次元の行列式で表すと、 z 軸の回転として

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (A5)$$

となります。他の軸である x 軸での回転と y 軸での回転の行列を求め、式(2)を使って、 x 軸で回転(角度 α)、 y 軸で回転(角度 β)、 z 軸で回転(角度 γ)の順で位置 $[x, y, z]$ を回転させると

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (A6)$$

となります(回転行列は回転させる順に右から左に並んでいます)。結果

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (A7)$$

となります。この例は座標上の点の回転を示しましたが、座標軸そのものの回転は角度が逆符号になりますので \sin の項の符号が変わります。回転前と回転後の座標点の値が分かっている場合の角度の求め方は、(A7) 式で x 軸上の点 $[1, 0, 0]$ の回転後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \beta & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \end{bmatrix} \quad (A8)$$

の z' 軸上の値 $z' = -\sin \beta$ から β を求め、次に x 軸上の値 $x' = \cos \beta \cos \gamma$ から γ を求め、 y 軸上の値 $y' = \cos \beta \sin \alpha$ から α 求めることができます。

【参考文献】

- 1) Grood ES, Suntay WJ : A joint coordinate system for the clinical description of three-dimensional motions: application to the knee. *J Biomech Eng.* 1983; 105 (2) : 136-144.
- 2) 土屋和夫監修：臨床歩行分析入門。臨床歩行分析懇談会編。医歯薬出版、東京、1989。
- 3) Yamaguchi GT, Zajac FE : A planar model of the knee joint to characterize the knee extensor mechanism. *J Biomech.* 1989; 22: 1-10.
- 4) 金井 章, 元田英一・他 : スクワット時の運動課題の違いによる脛骨前方引き出し力の変化について。日本臨床バイオメカニクス学会誌。2004; 25: 155-159.
- 5) Zajac FE : Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control. *Crit Rev Biomed Eng.* 1989; 17 (4) : 359-411.
- 6) 鈴木康雄, 元田英一 : 筋骨格システムのコンピュータモデルとその応用。日本災害医学会会誌。1999; 147: 667-672.
- 7) 内藤尚, 長谷和徳・他 : 神経・筋骨格系を有する3次元股義足歩行シミュレーションモデルの開発。バイオメカニズム学会誌。2005; 29: 160-169.
- 8) Suzuki Y : Dynamic optimization of transfemoral prosthesis during swing phase with residual limb model. *Prosthet Orthot Int.* 2010; 34 (4) : 428-438.