寄　稿

理学療法士のための力学　— 基礎編 — *

鈴木康雄

1．はじめに

理学療法士にとって力学は，多くの場面で意識しなくてはならない概念であると思います．その中でもバイオメカニクスと呼ばれる分野においては，力学は重要な要素を占めています．そのため，理学療法士の方に接していると，力学に関連した話題がしばしば出ます．しかし，話を進めていると，その理解の仕方に違いが生じていることが時々あります．その中で気がついたことを中心に述べたいと思います．

一般に力学といっても，それを扱う分野によって必要とする中身が異なっています．例えば機械工学の分野では機構学（ロボット学）に応用するために線形代数という手法を多用したり，物理学の分野では素粒子を扱うために（量子力学）ハミルトニアンと呼ばれる運動方程式を求めたりします．力学の教科書にはあまりにも多くのことが書かれており，これらの分野の専門的な力学は，生体を扱う我々にとってあまり必要でないことも多くあります．しかし，一方で，最近のバイオメカニクスにおいては，臓器の複雑な動きを対象とすることもあり，詳細な解析を求められることもあります．そこでは複雑な力学というより，高度な数学的手法を用いているだけ，という場合もあります．そのような場合でも力学の基礎的な概念は同じですので，力学の基本をしっかりおさえ，応用技術を習得することは重要と考えます．

そこで，理学療法士が知っていて有用と思われる力学について，本稿では第 1 回目として，基礎的な概念について述べます．陥りやすい間違いの多くはこの段階で生じます．第 2 回目はその応用について述べる予定です．特に三次元化したときや，複雑な構造になったときの力学について述べたいと思います．

2．つりあい式と運動方程式

力学の入門としてしばしば引用される法則にニュートンの 3 つの法則があると言われます．それを改めて列挙すると，

1）慣性の法則：外力が作用しなければ物体は一定の速度で動き続ける（静止状態も含む）．

2）加速度の法則：物体の加速度はそれを生じさせる力に比例し，その方向は力の方向と同じであり，物体の質量に比例する．

3）作用・反作用の法則：接触している物体間に働く作用と反作用は常に同じ作用線上に起こり，その大きさは等しく，向きは反対．

この中で，最初の法則と 2 番目の法則は実は同じものとして解釈できます．その理由を式からみてみましょう．第 2 法則から，

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$　微分記号を使えば　$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{m}\dfrac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt^2}}$

が知られています．———— (1)

もし，力が発生していなかったら，$F = 0$ ですから，物体には質量があるので，加速度 $\boldsymbol{a}$ が「0」です．加速度が生じてないということは速度が一定になります（数学的には時間で積分することになりますが，数学を使わなくても理解できると思います）．これは第 1 法則の意味することと同じになります．つまり，力が働いていなければ一定の速度のままで，一定の速度を保っているなら力は働いていないことになります．トレッドミルを考え

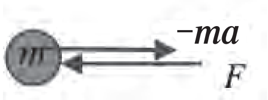
＊　Mechanics for Physical Therapists: Basics

日本福祉大学　健康科学部　福祉工学科
（〒 475-0012　愛知県半田市東生見町 26-2）
Yasuo Suzuki, Dr. of Engineering: Faculty of Health Sciences, Department of Human Care Engineering, Nihon Fukushi University

#　E-mail: yasuo-s@n-fukushi.ac.jp

てみましょう．トレッドミルは一定の速度で床が動いています．ということは，床から歩行者へは力は働いていないことになり，動かない床の上で歩いていることと同じになります．それは，新幹線の通路を歩いていても，さらには，地球の自転という時速千 *km/h* のトレッドミル上で歩いていても，床の速度を意識することなく歩けることからもうなずけると思います．

では，第1法則が第2法則から導かれるのなら，第3法則とはどのような関係でしょうか．式（1）を見てみると，重さ m の物体に力 F をかけると，加速度 a で動くという意味にとれます．この F のことを外力と呼びますが，この外力に対して反作用として働く力は何でしょう．それは慣性力として理解できます．慣性力は速度が変化し加速度が働くときに，一定の速度で留まろうとする力と考えたらどうでしょう．例えば，ボールを投げようとするとき，手がボールに力を加えようとすることに対して，ボールが動くことをいやがり，留まろうとする力が働きます．



これが慣性力です．地球がどんなに速い速度で自転・公転しようとも，一定速度ですので，地上で加速度のある運動をしない限り慣性力は働きません．ただし，回転することによる力は働いています．その慣性力は外力に対して反対方向で同じ大きさの力がはたらきます，式（1）の ma を左辺にもってくると，

$$\boldsymbol{F + (-ma) = 0} \qquad (2)$$

という式に変形できます．するとこの式の意味するところは，加速度 a で動こうとするときに働く力 F に慣性力（$-ma$）を加えると「0」になる，つまり釣り合っている．という意味に解釈できます．このような釣り合い式を「運動方程式」と呼びます．通常は $md^2x/dt^2 - F = 0$ と微分方程式で表すことが多いです．したがって，ニュートンの3つの法則は，動的な運動のつりあい式である運動方程式で表現することで，全て解釈することも可能です．ここで大事なのは，運動のつりあいという考え方です．そのときのポイントは方向で，正負の符号を同じ向きに揃えることです．上の式（2）では力が働いて運動している方向と慣性力が働いている方向は逆になりますので，慣性力の項には「−」記号がついています．静的な場合，作用している力を F_1，反作用の力を F_2 とすると，つりあい式は $F_1 + F_2 = 0$ となり，これを解けば F_1 と F_2 は同じ大きさで方向が反対（$F_1 = -F_2$）となります．

もう一つの例を示します．例えば，かかと接地時に柔らかいクッションに足が当っている場合を想定してみましょう．その場合，足の動きが急に止まるのではなく，ある程度の加速度 a' をもって止まります．そのため，床反力による外力 F と，重力による体重 mg の力と，足の加速度による慣性力 ma' が働きます．

$$\boldsymbol{F + (-mg) + (-ma') = 0} \qquad (3)$$

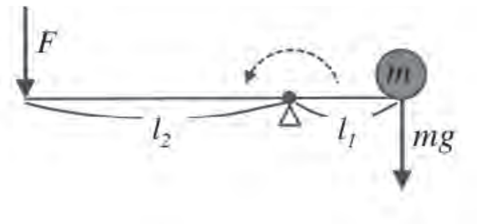
もちろん，動いていない状態（足が床面ついてしまった後）では，a' は0ですから，床反力 F は体重 mg と等しくなります．しかしその前に，ある速度から速度0へ必ず減速し，負の加速度が発生します．もしクッションがなければ，急激な減速で加速度（動く方向とは逆の上方向）は大きなものになり，式（3）のつりあい式から床反力 F は大きな値となり，足に衝撃として伝わります．もしクッションがあれば，急な減速を防ぎ，a' はある程度小さな値を持つことができ，衝撃を和らげることができます．注意しなければならないのは加速度の方向です．重力は下を向いているので体重の項には，はじめから負の符号がついていますが，足の加速度は下方向に減速なので a' は正の値です．当然ですが，もし，a' が下方向へ g の加速度であれば（$a' = -g$）自由落下となり，反力 $F = 0$ となります．ただし人の場合，かかと接地時には，足より上部にある関節機構などで，それなりにショックを和らげており，足部のクッションはそれを補助する役割になると思います．

力学的な関係について式を作る場合，ぜひこのようなつりあい式（運動方程式を含む）を作ってみてください．式を作って考えてみると，理解が進みやすいと思います．物体の運動方程式は他の方法でも求めることができます．物体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから Lagrange の運動方程式を用いて運動方程式が導出できます．少し高度な方法になりますが，複雑な系では，むしろこの方法のほうが，容易に式が求まる場合があります．機会があればトライしても良いと思います．

3. 回転物体

上記の例では並進移動する物体についてとりあげました．次に，回転する物体について考えてみ

ましょう．回転する場合，回転中心が存在します．てこの原理ではてこの支点に相当します．てこの原理ではその他に力点と作用点という概念で説明されます．これもつりあい式で考えてみましょう．支点から長さ l_1 の位置に重さ m の重りがあり（作用点），重りと反対方法に支点から l_2 の位置で力をかける（力点）という典型的な例があったとします．

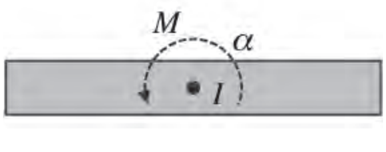


この場合，支点を回転する軸とみなして回転する力のつりあい式を考えます．回転する力とは即ちモーメントのことで，モーメントは長さ×力で表しますから，重りによるモーメントは mgl_1，力によるモーメントは Fl_2 で，つりあい式は，

$$Fl_2 + (-mgl_1) = 0 \qquad (4)$$

になります．ここでも注意することは，回転の「方向」です．この式では左まわりを正としています（名城線では栄から金山方面の電車に乗ることに相当します）．原則，左まわりを正にして下さい．すると，1 項目の力 F は左回転で正ですが，2 項目の重りは右回転なので負の符号がついています．ちなみに，モーメントとトルクは同じ概念の言葉で，どちらを使っても良いですが，トルクは機械系の分野で使われており，我々を含めた理学系はモーメントという言葉を使うことが多いように思います．

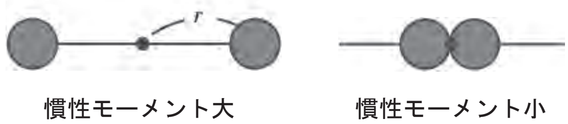
次に，並進方向の力のつりあいを考えたときと同様に，回転運動が生じた場合のつりあい式を考えてみましょう．



力によって回転する運動が発生する場合，加速度に相当するのは回転の角加速度です．そして，重さ（質量）に相当するのは慣性モーメントと呼ばれています．モーメントを M，角加速度を α，慣性モーメントを I とすれば（2）式と同様に，

$$M + (-I\alpha) = 0 \qquad (5)$$

というつりあい式ができます．この式も，角加速度 α で回転させようとするときの回転による慣性力（$-I\alpha$）はモーメント M とつりあっているという意味にとれます．慣性モーメントとはどのようなものでしょう．これは，物体の回転のしやすさを表しています．質量がどのように分布しているか，という物体の形状に依存しています．鉄アレイのような物体を考えて見ましょう．中心に質量が無く，両端に質量があります．これを回転させる場合と，同じ質量で中心に質量をもっている場合と，どちらが回転しやすいでしょうか．直感的に鉄アレイの方が回転しにくく，一度回転したら止まりにくいことが分かります．慣性モーメントが大きいのは鉄アレイの方です．



水泳の飛び込み競技では離床した後，膝を曲げて体を抱え込む姿勢をとることがありますが，これによって回転する速度を上げています．手足を伸ばしたままではゆっくりとしか回転しません．これも，慣性モーメントの大きさを変化させることで，動きをコントロールしています．慣性モーメントは物体を質点に分解したときに，回転軸から質点までの距離 r の 2 乗と質点の質量 m をかけたものを，足し合わせたものです．

$$I = \sum mr^2 \qquad (6)$$

我々は，人の体節ごとの慣性モーメントの値を，回帰式などを使ってよく利用しますが，元になっている値の求め方は大きく分けて 2 つあります．1 つは，体節の形状をデータとして取得し，上記の式を利用して積分することで求めます．この場合，積分される物体の密度は均一であるという仮定をおきます．もう 1 つは，振り子の原理を使って，実際に回転させて求めます．こちらの方法を生体に使うには困難を生じますが，義足や野球のバットなど，体に装着する物や，運動に用いる用具などに使うことができます．ただし正確な振り子の周期を求めることが必要です．また，式からも推察できるように，回転する軸の位置によって慣性

モーメントの値は変わります．最も小さな値をとるのは重心位置を回転中心にしたときで，通常はこのときの値で示されます．身体の関節を軸にして回転を考える場合，回転軸は体節の端点になります．この場合，関節から重心までの長さ r_j とすると，重心まわりの慣性モーメント I に mr_j^2 を加えることで，関節まわりの慣性モーメントが得られます．運動方程式は，

$$M-(I+mr_j^2)\,\alpha=0 \qquad (7)$$

になります．一方，重心まわりの運動方程式は，重心が回転する（角加速度 α）だけでなく，端点の関節が回転することで，重心も運動します．そのため，関節を原点とした重心の位置を (x, y) として，重心の並進加速度（d^2x/dt^2, d^2y/dt^2）から，

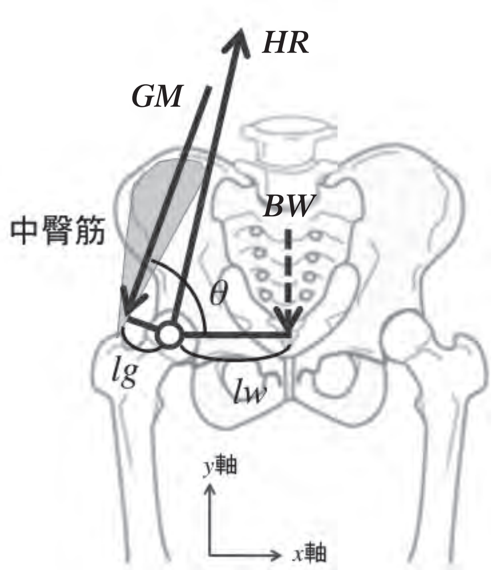
$$M-I\alpha+my\frac{d^2x}{dt^2}-mx\frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad (8)$$

になります．果たして上記の2つの式は同じものでしょうか．難しくないので，余裕のある方は解いてみてください．トライしたけど分からなかったという方は，私宛にメールをいただければ，お答えします．

4．2次元での応用例

これまで述べてきた事例は，考えを整理しやすいようにシンプルにし，並進の場合は回転しない例を，回転の場合は並進のつりあいを考えなくてもよいようにしました．しかし，並進のつりあい式と回転のつりあい式は常にセットで考えたほうが実際的です．というのは，2次元平面での運動は自由度が3あり，並進が2つの方向，回転が1つの軸をもっています．ここで自由度とは，運動を規定することのできる座標系の数のことで，つりあい式（運動方程式）を自由度の数だけ作れば，運動を完全に記述することができます．並進の2つは x 軸と y 軸の方向で，それぞれが直角に交わっています．回転はその x 軸と y 軸で構成される平面から垂直に伸ばした z 軸で回転します．2次元平面を扱うのですが，ここではすでに3次元な考えになっています．z 軸の向き（あるいは回転する方向）は2つありますが，一般的に右ねじ系（右手系）で考えます．ネジを x 軸から y 軸の方向に回転させるとそのネジは z 軸の方に進むというものです．あるいは，右手を開いて，親指を立たせ，中指以下を90度屈曲したときに，親指の向く方向が x 軸，人差し指の向く方向が y 軸，中指の向く方向が z 軸，という x, y, z の順番です．

3自由度の式を使った例を示します．前額面上で，中殿筋により発生する股関節間力を計算します．ここで，中殿筋は水平軸（x 軸）に対して θ の角度を持ち，股関節までの距離 lg で，力 GM を発揮しているものとします．上半身の重さは垂直軸（y 軸）の方向で，股関節までの距離 lw において，BW の重さとします．また股関節には，上半身の重さと中殿筋による力によって関節間力 HR が発生しています．



Donald A.Neumann,
筋骨格系のキネシオロジー（2008）を改変.

どのように，この問題を解いていけば良いのでしょうか．並進2つと回転1つの式を作ります．まず，x 方向の力では上半身の重さは影響しないので，中殿筋の x 成分 GMx（$=GM\cos(\theta)$）と股関節間力の x 成分 HRx だけになります．ここでも力の方向に注意し，それがどのような物に作用しているかを考えます．股関節という場所で骨盤に作用している力を考えたのが上の図です．中殿筋は収縮して骨盤に対して斜め下方向に働きますが，大腿骨に作用させる場合は上向きになります．同様に，大腿骨に作用する股関節間力は下向きであり，大腿骨に作用する上半身の重さによる力は，床反力から下肢の重さを引いて上向きに作用します．骨盤に作用するか大腿骨に作用するかで向きは全て反対になります．x 軸方向のつりあい式は，力の向きに注意して，

$$-GM\cos(\theta) + HRx = 0 \qquad (9)$$

になります．同様にして，y 軸方向のつりあい式は，

$$-GM\sin(\theta) + HRy - BW = 0 \qquad (10)$$

回転の式は，軸をどこにするかを最初に決めます．骨盤上のどこでもよいのですが，股関節の位置にするのが便利そうなので，回転軸を股関節上に定めます．回転する向きは x から y の向きの左回り（反時計回り）が正です．回転のつりあい式は，

$$l_g GM - l_w BW = 0 \qquad (11)$$

となります．測ることができない未知数は GM, HRx，HRy の3つで，式も3つですから連立方程式として解けます．

さらに，問題を拡張して，杖をついた場合，杖が支持する荷重の大きさと，杖の位置が計測できれば，杖による並進と回転による力の項をつりあい式に追加することが可能です．荷物を持った場合や，体幹を傾けた場合など，応用範囲はひろがります．歩行分析などでよく用いられる剛体リンクモデルの式も，各体節に対して上記の考え方をあてはめています．

本稿の内容を簡単にまとめると，

- 静力学でも動力学でも，つりあい式を作ることで計算が可能である．
- 2次元では力の3つの成分（並進の2つと回転の1つ）を考える．

ということではないでしょうか．

5. おわりに

今回の内容は力学の初歩に相当し，すでにご存じの知識ばかりかもしれませんが，通常の力学の教科書とは視点を少し変えてみたつもりです．というのは，ここで述べた考え方はコンピュータで力学計算する場合に使われる方法に近いものです．コンピュータはダイヤグラムを描く（力の分解・合成を平行四辺形で図示する）ような方法では計算しておらず，シンプルな基本形を基に複雑化させています．今後，ますます複雑で精緻な問題を扱う機会が増え，コンピュータを用いて力学計算する場合が増えると予想されます．そのときに計算の中身がイメージできなければ，手段としてのコンピュータは扱いにくいものになっているかもしれません．